University of Al-Qadisiya
College of Computer Science and IT
Department of Mathematics

جامعة القادسية
كلية علوم الحاسوب و تكنولوجيا المعلومات
قسم الرياضيات

Time: 2 Hours
Date: 16 / 5 /2016

أسم المقرر: تحليل عقدي ٢
رقم المقرر: ر٤٥٢
الامتحانات النهائية / الفصل الدراسي الثاني ٢٠١٥-٢٠١٦

ملاحظة : أجب عن أربعة أسئلة فقط.

س١ أ) أذا كانت f دالة تحليلية داخل وعلى منحني مغلق بسيط وبالاتجاه الموجب عدا عند النقاط الشاذة المعزولة $z_1, z_2, \cdots, z_n$ للدالة f فان $\int_c f(z)dz = 2\pi i[\mathrm{Res}(f,z_1)+\mathrm{Res}(f,z_2)+\cdots+\mathrm{Res}(f,z_n)]$. برهن ذلك . (٧ درجات)

ب) برهن ان تحويل القوى $w = z^n$ حيث n عدد صحيح حافظ للزوايا باستثناء النقطة 0 ، حيث تضرب الزوايا المحصورة بين المنحنيات بالعدد n . (٨ درجات)

س٢ أ) بأستخدام الرواسب جد قيمة التكامل الاتي: $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2}$. (٨ درجات)

ب) برهن ان المتسلسلة $z(1-z)+z^2(1-z)+z^3(1-z)+\cdots$ متقاربة تقارباً مطلقاً لكل $|z|<1$. (٧ درجات)

س٣ أ) أذا كتبنا الدالة $(a>0)$ ، $f(z)=\frac{8a^3z^2}{(z^2+a^2)^3}$ كالاتي: $f(z)=\frac{\phi(z)}{(z-ai)^3}$ ، بحيث $\phi(z)=\frac{8a^3z^2}{(z+ai)^3}$. بين لماذا الدالة $\phi(z)$ لها شكل متسلسلة تايلر عند النقطة $z=ai$ واستخدمها لتبين ان الجزء الاساسي لـ f عند تلك النقطة هو

$$\frac{\phi''(ai)/2}{z-ai}+\frac{\phi'(ai)}{(z-ai)^2}+\frac{\phi(ai)}{(z-ai)^3}=-\frac{i/2}{z-ai}-\frac{a/2}{(z-ai)^2}-\frac{a^2 i}{(z-ai)^3}.$$

(٨ درجات)

ب) برهن انه أذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في مجموعة مفتوحة G فعندئذ يكون التحويل $w=f(z)$ حافظا للزوايا في نقاط G التي تحقق $f'(z)\neq 0$. (٧ درجات)

س٤ أ) اشتق تمثيل متسلسلة تايلر الاتية: $(|z-i|<\sqrt{2})$ ، $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}$. (٨ درجات)

ب) اثبت أن: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Cos(x)dx}{(x^2+1)^2}=\frac{\pi}{e}$. (٧ درجات)

س٥ أ) برهن انه أذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة مغلقة ومقيدة R وكان للدالة $f(z)$ عدد غير منته من الاصفار في R فان $f(z)=0$ لكل z في R . (٨ درجات)

ب) اثبت الاتي: $(|z|>0, 0<\arg(z)<2\pi)$ ، $\mathrm{Res}_{z=i}\frac{z^{1/2}}{(z^2+1)^2}=\frac{1-i}{8\sqrt{2}}$. (٧ درجات)

تمنياتنا لكم النجاح

أ.م.د. وقاص غالب عطشان
مدرس المقرر

د. قصي حاتم عكار
رئيس قسم الرياضيات

جامعة القادسية — الاجوبة النموذجية للامتحان النهائي للمقرر (تحليل عقدي(٢) – ر٤٥٢)
كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات   العام الدراسي ٢٠١٥ – ٢٠١٦ / الفصل الثاني
قسم الرياضيات

جواب السؤال الاول: أ) لتكن C_k دوائر مركزها النقاط z_k ، $k=1,2,\dots,n$ النقاط الشاذة المعزولة على التوالي حيث هذه الدوائر تقع كلياً داخل المنحني C ولا تحتوي في داخلها اي نقطة من النقاط الشاذة عدا المركز z_k بحيث ان هذه الدوائر الصغيرة لا تتقاطع مع بعضها البعض

∴ لكل دائرة C_k وبالاتجاه الموجب

$$\int_{C_k} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot Res(f,z_k)$$

∴

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz$$

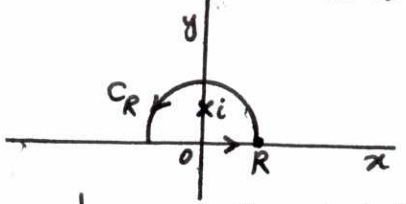
$$= 2\pi i\, Res(f,z_1) + 2\pi i\, Res(f,z_2) + \cdots + 2\pi i\, Res(f,z_n)$$

$$= 2\pi i\left[Res(f,z_1)+Res(f,z_2)+\cdots+Res(f,z_n)\right]$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f,z_k)$$

ب) باستخدام الخاصية (١) يكون التحويل $w=z^n$ حافظاً للزوايا عندما $nz^{n-1}\neq 0$ اي انه حافظ للزوايا عندما $z\neq 0$. أما بالنسبة للزوايا المحصورة بين المنحنيات المارة بنقطة الاصل فنتبع ما يأتي: نفرض ان g, h منحنيان يمران بنقطة الاصل وزاويتاهما عند تلك النقطة هما ϕ ، θ على التوالي. اي ان الزاوية المحصورة بين هذين المنحنيين هي الفرق بين ϕ ، θ ولتكن $\theta-\phi$ على سبيل المثال. كما ان صورتي h, g بفعل التحويل $w=z^n$ هما المنحنيين h^n ، g^n زاويتاهما عند نقطة الاصل $n\phi$ ، $n\theta$ على التوالي. اي ان الزاوية المحصورة بينهما عند نقطة الاصل هي $n(\theta-\phi)$ التي تساوي الزاوية المحصورة بين h, g مضروبة بالعدد n.

جواب السؤال الثاني: أ) لإيجاد قيمة التكامل المطلوب وباستخدام الدالة $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2}$ وكانتور مغلق وبسيط بحيث ان $R>1$.



حيث نلاحظ ان $\int_{-R}^{R}\frac{dx}{(x^2+1)^2}+\int_{C_R}\frac{dz}{(z^2+1)^2}=2\pi i\,Res(f,i)$ ونجد الرواسب للدالة $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2}$ عند القطب $z=i$ (من الرتبة الثانية) كالآتي:

$$Res(f,i)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\cancel{(z-i)^2}\cdot\frac{1}{\cancel{(z-i)^2}(z+i)^2}\right]$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i)^2}\right]=\lim_{z\to i}\left[\frac{-2}{(z+i)^3}\right]=\frac{1}{4i}$$

اذن

$$\int_{-R}^{R}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=2\pi i\left[Res(f,i)\right]-\int_{C_R} f(z)\,dz=\frac{\pi}{2}-\int_{C_R} f(z)\,dz$$

اذا كانت z نقطة على C_R فان $|z^2+1|\geq R^2-1$

جامعة القادسية — الاجوبة النموذجية للامتحان النهائي للمقرر (تحليل عقدي (٢) – ر ٤٠٢)
كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات العام الدراسي ٢٠١٥ – ٢٠١٦ / الفصل الثاني
قسم الرياضيات

اذن

$$\left|\int_{C_R}\frac{dz}{(z^2+1)^2}\right| \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} = \frac{\frac{\pi}{R^3}}{(1-\frac{1}{R^2})^2} \longrightarrow 0 \text{ as } R\longrightarrow\infty$$

وبالتالي نستنتج ان

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{\pi}{2} \quad \text{او} \quad \int_{0}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{\pi}{4}$$

ب) لتكن

$$T_n(z) = |z(1-z)|+|z^2(1-z)|+\cdots+|z^n(1-z)|$$

$$=|1-z|\left\{|z|+|z|^2+|z|^3+\cdots+|z|^n\right\}$$

$$=|1-z||z|\left\{\frac{1-|z|^n}{1-|z|}\right\}$$

اذا كان $|z|<1$ فأن $\lim_{n\to\infty}|z|^n=0$ و $\lim_{n\to\infty}T_n(z)$ موجودة بحيث ان المتسلسلة متقاربة تقارباً مطلقاً. حيث نلاحظ ان متسلسلة القيم المطلقة متقاربة الى $\frac{|1-z||z|}{1-|z|}$.

جواب السؤال الثالث: أ) نكتب الدالة $f(z)=\frac{8a^3z^2}{(z^2+a^2)^3}$ كالآتي $f(z)=\frac{\phi(z)}{(z-ai)^3}$ بحيث $\phi(z)=\frac{8a^3z^2}{(z+ai)^3}$

بما ان النقطة الشاذة للدالة $\phi(z)$ هي فقط $z=-ai$ ، $\phi(z)$ لها شكل متسلسلة تايلر

$$\phi(z)=\phi(ai)+\frac{\phi'(ai)}{1!}(z-ai)+\frac{\phi''(ai)}{2!}(z-ai)^2+\cdots \qquad (|z-ai|<2a)$$

حول $z=ai$. لذلك

$$f(z)=\frac{1}{(z-ai)^3}\left[\phi(ai)+\frac{\phi'(ai)}{1!}(z-ai)+\frac{\phi''(ai)}{2!}(z-ai)^2+\cdots\right] \quad (0<|z-ai|<2a).$$

وباشتقاق الدالة $\phi(z)$ نحصل على

$$\phi'(z)=\frac{16a^4iz-8a^3z^2}{(z+ai)^4}, \quad \phi''(z)=\frac{16a^3(z^2-4aiz-a^2)}{(z+ai)^5}$$

اذن

$$\phi(ai)=-a^2i,\ \phi'(ai)=-\frac{a}{2},\ \phi''(ai)=-i$$

وبالتالي تكون

$$f(z)=\frac{1}{(z-ai)^3}\left[-a^2i-\frac{a}{2}(z-ai)-\frac{i}{2}(z-ai)^2+\cdots\right] \quad (0<|z-ai|<2a)$$

الجزء الاساسي للدالة f عند النقطة $z=ai$ هو

$$-\frac{i/2}{z-ai}-\frac{a/2}{(z-ai)^2}-\frac{a^2i}{(z-ai)^3}$$

ب) لتكن $h(t)$ ، $g(t)$ منحنيين في G متقاطعين في النقطة $t=a$ ولتكن $h'(a)\neq 0$ ، $g'(a)\neq 0$. نفرض ان الزاوية بين هذين المنحنيين تساوي:

$$\lambda=\arg g'(a)-\arg h'(a)$$

عندئذ صورة المنحنيين $h(t)$ ، $g(t)$ هي المنحنيين $f\circ h(t)$ ، $f\circ g(t)$ المتقاطعين في النقطة $f(a)$ والزاوية الصورة

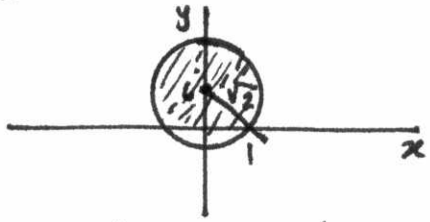
جامعة القادسية
كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات
قسم الرياضيات

الاجوبة النموذجية للامتحان النهائي للمقرر (تحليل عقدي(c) - ر٤٠٥)
العام الدراسي ٢٠١٥ – ٢٠١٦ / الفصل الثاني

بينهما هي :

$$\gamma = \arg(f\circ g)'(a) - \arg(f\circ h)'(a)$$
$$= \arg\left(f'(a)g'(a)\right) - \arg\left(f'(a)h'(a)\right)$$
$$= \cancel{\arg f'(a)} + \arg g'(a) - \cancel{\arg f'(a)} - \arg h'(a)$$
$$= \arg g'(a) - \arg h'(a) = \lambda .$$

جواب السؤال الرابع : أ) الدالة $\frac{1}{1-z}$ لها نقطة شاذة عند $z=1$. متسلسلة تايلر عند $z=i$ موجودة عندما $|z-i|<\sqrt{2}$ ومبينة بالشكل



لإيجاد المتسلسلة نبدأ بالآتي:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-i)-(z-i)} = \frac{1}{1-i}\cdot\frac{1}{1-\frac{(z-i)}{(1-i)}} .$$

وهذا يقترح بأن نضع بدلاً من z هو $\frac{z-i}{1-i}$ في التوسيع المعروف $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n , (|z|<1)$

ونضرب بـ $\frac{1}{1-i}$. وتكون متسلسلة تايلر كالآتي:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}} , \quad (|z-i|<\sqrt{2})$$

ب) بما ان $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}dx$ هو الجزء الحقيقي للتكامل $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}dx$ الذي يمثل تكامل الدالة العقدية $f(z)=\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$ على طول المحور الحقيقي ، نختار $R>1$ حيث C_R يمثل المنحني $C: |z|=R$ وبما ان التكامل على طول المحور الحقيقي اي ان $y=0$ ، بما ان الدالة $\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$ دالة تحليلية في جميع النقاط عدا عند القطبين من الرتبة الثانية $z=\pm i$ والتكامل نكون في النصف الاعلى للدائرة C_R ، $\therefore z=i$ تقع داخل نصف الدائرة التي حدودها القطعة $-R\le x\le R$ ، اي اننا نجد تكامل الدالة f طول هذه الحدود وباتجاه عكس عقرب الساعة ، نحسب الراسب للدالة f عند القطب من الرتبة الثانية $z=i$ ،

$$Res(f,i) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\cancel{(z-i)^2}\cdot\frac{e^{iz}}{\cancel{(z-i)^2}(z+i)^2}\right]$$
$$= \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}}{(z+i)^2}\right) = \frac{-i}{2e}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}dx = 2\pi i\left[Res(f,i)\right] - \int_{C_R} f(z)\,dz = \frac{\pi}{e} - \int_{C_R} f(z)\,dz$$

جامعة القادسية — الاجوبة النموذجية للامتحان النهائي للمقرر (تحليل عقدي (2) ـ ر ع 2)
كلية علوم الحاسوب وتكنولوجيا المعلومات العام الدراسي ٢٠١٥ ـ ٢٠١٦ / الفصل الثاني
قسم الرياضيات

الآن يجب ان نثبت التكامل $\int_{C_R} f(z)\,dz = 0$

بما ان $|z^2+1|^2 \geq (|z|^2-1)^2$ وبما ان $|e^{iz}| = |e^{-y}| \leq 1$ لذلك عندما $y \geq 0$ فأن

$$\left|\int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\,dz\right| \leq \int_{C_R} \frac{|e^{iz}|}{|z^2+1|^2}\,|dz| \leq \frac{\pi R}{(R^2-1)^2}$$

نأخذ الغاية عندما $R \to \infty$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\,dz = 0$$

$$\therefore \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{e} - 0$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{e}.$$

جواب السؤال الخامس: أ) بما ان عدد الاصفار R غير منتهية وان R مقيدة فيوجد نقطة نهاية للمجموعة R. وبما ان R مغلقة فأن a تنتمي الى R. لذا فأن $f(z)=0$ لكل z في R.

ب) نكتب الدالة $f(z) = \frac{z^{1/2}}{(z^2+1)^2}$ ، $(|z|>0, 0<\arg z<2\pi)$ كالآتي:

$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-i)^2}$ بحيث ان $\phi(z) = \frac{z^{1/2}}{(z+i)^2}$. بما ان $\phi'(z) = \frac{(z+i)z^{-1/2} - 4z^{1/2}}{2(z+i)^3}$

و $i^{1/2} = e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ ، $i^{-1/2} = e^{-i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$ ، اذن

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{z^{1/2}}{(z^2+1)^2} = \phi'(i) = \frac{1-i}{8\sqrt{2}}.$$